

令和7年度大学入学共通テスト 数学 I・数学 A 解答解説

GTS

実施日：2025/1/19 作成日：2025/1/20

第1問

[1] a, b を実数とする。 x についての方程式

$$(2a + 4b - 2)x^2 + (5a + 11)x - b - 8 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

(1) $a = 1$ とする。

b に着目すると、 $\textcircled{1}$ の左辺は

$$(4x^2 - 1)b + 16x - 8 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表せる。よって、 $\textcircled{2}$ を因数分解すると

$$(2x + 1)(2x - 1)b + 8(2x - 1)$$

より

$$(2x - 1) \left(\underline{27}bx + b + \underline{81} \right)$$

となる。したがって、 $x = \frac{1}{2}$ は $\textcircled{1}$ の解の一つであることがわかる。

(2) $b = 2$ とする。

(i) $\textcircled{1}$ の左辺を因数分解すると

$$(2a + 6)x^2 + (5a + 11)x - 10$$

より

$$\left(\underline{27}x + \underline{51} \right) \left\{ \left(a + \underline{39} \right) x - \underline{29} \right\}$$

となる。

(ii) $a = 2\sqrt{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ の解は

$$(2x + 5)\{(2\sqrt{2} + 3)x - 2\}$$

より、 $x = \frac{2}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} = 6 - 4\sqrt{2}$ となるので

$$x = -\frac{5}{2}, \underline{64} - \sqrt{\underline{42}}$$

となる。

(iii) $a = -3$ であることは、 $\textcircled{1}$ の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるための $\textcircled{1}$ 十分条件であるが、必要条件ではない。

$\therefore a = -3$ のとき、 $-2(2x + 5) = 0$ となるので $x = -\frac{5}{2}$

逆に、 $\textcircled{1}$ の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけとなるとき、 $\{(a + 3)x - 1\} = -\frac{5}{2}$ となる a を考えると $a = -\frac{15}{9}$ とな

るので、 $a = -\frac{15}{9}$ のときも $\textcircled{1}$ の解が $x = \frac{5}{2}$ となる。したがって、十分条件は成り立つが、必要条件は成り立たない。

[2] (細かい問題文・図は省略)

(1) $\angle PAB = \alpha, \angle PBA = \beta$ とおく。

円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。 $\angle OAB = 90^\circ$ であるから、 $\angle AOH = \alpha$ である。よって、 $\triangle OAH$ に着目すると、三角比の定義より、 $AH = 2 \sin \alpha$ であるから

$$PA = 2AH = 4 \sin \alpha \quad \dots\dots\dots ①$$

である。

同様にして、円 O' の中心 O' から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H' とすると、 $BH' = 4 \sin \beta$ であるから

$$PB = 2BH' = 8 \sin \beta \quad \dots\dots\dots ②$$

であることもわかる。

また、 $\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと、正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1$$

が成り立つので

$$PA \sin \alpha = PB \sin \beta$$

である。この式に、① と ② を代入することにより

$$4 \sin^2 \alpha = 8 \sin^2 \beta$$

となるため

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$$

$$PB = \sqrt{2} PA$$

となることがわかる。さらに

$$R_1 = \frac{PB}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} PA}{\frac{1}{4} PA} = 4\sqrt{2}$$

が得られる。

(2) (一部、問題文・図を省略)

$\triangle PAB, \triangle QAB$ の外接円をそれぞれ R_1, R_2 とおく。このとき、 $R_1 = R_2$ である。

さらに、 $\sin \angle APB = \sin \angle AQB$ であることもわかる。

(3) (一部、問題文・図を省略)

$AB = 2\sqrt{7}$ とする。このとき

$$4\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{7}}{\sin \angle APB}$$

であるから

$$\sin \angle APB = \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

である。(1) より、 $PB = \sqrt{2} PA$ であるから

$$PA = \sqrt{14}$$

である。

同様に、 $QA = \sqrt{7}$ であることが分かる。

第 2 問

[1] (問題文・図は省略)

- (1) 仮定 1 と仮定 2 のもとで考える。 C_1 をグラフに持つ 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。このとき、点 $(0, 1)$ を通ることより、 $c = \underline{1ア}$ であり、また 2 点 $(-\frac{5}{2}, 0)$ 、 $(\frac{1}{2}, 0)$ を通ることより、

$$\begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + 1 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 1 \end{cases}$$

を解いて、 $a = -\frac{4}{5}$ 、 $b = -\frac{8}{5}$ となる。したがって、

$$y = -\frac{\underline{4イ}}{\underline{5ウ}}x^2 - \frac{\underline{8エ}}{\underline{5オ}}x + 1$$

である。

C_1 の頂点の y 座標は

$$C_1 : y = -\frac{4}{5}(x^2 + 2x) + 1 = -\frac{4}{5}(x+1)^2 + \frac{9}{5}$$

より、 $\frac{\underline{9カ}}{\underline{5キ}}$ である。このことを用いると、 C_2 について、3 点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 、 $(-1, \frac{9}{5})$ 、 $(1, \frac{9}{5})$ を通るので (\because 点 $(-1, \frac{9}{5})$ は C_1 の頂点、点 $(1, \frac{9}{5})$ は C_3 の頂点である。)

$$\begin{cases} \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

これを解いて $a = -\frac{36}{25}$ 、 $b = 0$ 、 $c = \frac{81}{25}$ であるから、 C_2 の頂点の y 座標は $\frac{\underline{81クケ}}{\underline{25コサ}}$ であることがわかる。

したがって、大きな噴水の高さ $\frac{81}{25}$ は、小さな噴水の高さ $\frac{9}{5} = \frac{45}{25}$ の ①おおよそ 2 倍 である。

- (2) (問題文を一部省略)

仮定 1 と仮定 2' のもとで考える。このとき、 C_2' は

$$y = ax^2 + 5$$

とおける。また、点 $(1, \frac{9}{5})$ を通ることより

$$\frac{9}{5} = a + 5$$

を解いて $a = -\frac{16}{5}$ となる。したがって、

$$C_2' : y = -\frac{16}{5}x^2 + 5$$

この放物線の x 切片の正の部分が点 P_2' となるから $0 = -\frac{16}{5}x^2 + 5$ すなわち

$$\frac{16}{5}x^2 = 5$$

より、 $x^2 = \frac{25}{16}$ である。 $x > 0$ のとき、 $x = \frac{5}{4}$ で、これが P_2' の x 座標である。

P_2 は $\frac{3}{2}$ であるから、 $\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ より、 P_2' は P_2 より $\frac{\underline{1ス}}{\underline{4セ}}$ だけ ② $P_{1ユ}$ の方にある。

[2] (問題文は省略)

(1) (i) (問題文や図は省略)

(a) について、外国人宿泊者数が 100 を超えている都道府県が 3 つあり、そのうち日本人宿泊者数が 2000 を超えている都道府県が 2 つあるので、正しい。

(b) について、傾きが 10 の直線より下側にある都道府県は 1 つしかないの、これも正しい。

よって、(a) (b) の正誤の組合せとして正しいものは ① _ダ である。

(ii) (問題文や図は省略)

表 1 のデータにおいて、四分位範囲は $P_{36} - P_{12} = 1251 - 351 = \underline{900}$ ④ _チ となることから、令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県の数、 $P_{37} + 1.5 \times 900 = 2689$ 以上の数であるから P_{45}, P_{46}, P_{47} の 3 _ユ である。

(2) (問題文は省略)

$$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy} \text{ ④ } \text{チ}$$

また、 $s_{xy} > 0$ であるから、 s_z^2 と $s_x^2 + s_y^2$ の関係として、正しいものは $s_z^2 > s_x^2 + s_y^2$ ① _キ であることがわかる。

(3) (問題文は省略)

実験結果を用いると、35 枚の硬貨のうち 23 枚以上が表となった割合は

$$2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.0 + 0.1 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 4.3$$

より、4 _ト 3 _ニ % である。これを、23 人以上が「キャンペーン A の方がよい」と回答する確率としてみなし、方針に従うと、「キャンペーン A の方がよい」と回答する割合と「キャンペーン B の方がよい」と回答する割合は等しい」という仮説は、確率が 5 % 未満であるから、誤っていると判断する ① _ク。したがって、今回のアンケート結果からは、キャンペーン A の方がよいと思っている人が 多いといえる ① _ネ。

第 3 問 (問題文や図は省略)

(1) 3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わる。これを証明しよう。

直線 AD と BE は平面 ABED 上にあり、平行でないので 1 点で交わる。その交点を P とする。

点 P は直線 AD 上にあり、直線 AD は平面 ABED と平面 ACFD ② _ニ との交線であるから、点 P は平面 ACFD 上にあることがわかる。

また、点 P は直線 BE 上にあり、直線 BE は平面 ABED と平面 BCFE ③ _ニ の交線であるから、点 P は平面 BCFE 上にあることがわかる。

平面 ACFE と平面 BCFE との交線は直線 CF であるから、点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。したがって、3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。

(2) 五面体において、面 ABC は一辺の長さが 3 の正三角形であり

$$AD = 7, BE = 11, CF = 17, DE = 9$$

であるとする。また、6 点 A, B, C, D, E, F はある一つの球面上にあるとし、その球面を S とする。直線 AD と BE の交点を P とする。

(i) 平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり、4 点 A, B, E, D はその円周上にある。このことから、三角形 PAB と PED は相似であることがわかり、その相似比は

$$\triangle PAB : \triangle PED = AB : DE = 1 : \underline{3} _ウ$$

である。したがって

$$3PA = PE = PB + BE = PB + \underline{11} _{エオ}$$

$$3PB = PD = PA + AD = PA + \underline{7} _カ$$

が成り立つ。よって、上の式を連立して解くと

$$PA = \underline{5} _キ, PB = 4 _ク$$

となる。

(ii) 平面 BCFE と球面 S が交わる部分に着目すると、方べきの定理より

$$PB \cdot PE = PC \cdot PF = PC \cdot (PC + 17)$$

$$4 \cdot 15 = PC(PC + 17)$$

$$PC^2 + 17PC - 60 = (PC + 20)(PC - 3) = 0$$

となるので、

$$PC = \underline{3}_{\text{ケ}}$$

となる。したがって

$$BC : EF = 1 : 5, AC : DF = 1 : 4$$

より、それぞれ

$$EF = \underline{15}_{\text{コサ}}, DF = \underline{12}_{\text{シス}}$$

となる。

(iii) $\angle ADE, \angle ADF, \angle EDF$ の大きさに着目すると、次の命題の真偽の組合せとして正しいものは

(a) 平面 ABED と平面 DEF は垂直であるは、偽となる。

(b) 直線 DE は平面 ACFD に垂直であるは、真となる。

(c) 直線 AC と直線 DE は垂直であるは、真となる。

ことより、 $\textcircled{4}_{\text{セ}}$ であることがわかる。

第 4 問 (問題文や図を省略)

- (1) 1 回目または 2 回目に当たりが出る確率は 1 回目に当たる確率と 1 回目に当たりが出ず、かつ 2 回目に当たりが出る確率が排反であることより、 $\frac{3}{16} + 18 = \frac{5_{\text{ア}}}{16_{\text{イウ}}}$ である。このことから、1 回目、2 回目ともに当たりが出ない確率は、余事象の確率より、 $1 - \frac{5}{16} = \frac{11_{\text{エオ}}}{16_{\text{カキ}}}$ であることがわかる。1 回も当たりがでない確率は 1 回目 または 2 回目 または 3 回目に当たる確率の余事象の確率であるから、 $1 - \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{10}{16} = \frac{5_{\text{ク}}}{8_{\text{ケ}}}$ である。

以下では、主催者が参加者に対して負担する金額を X 円とする。すなわち、参加者がゲームで景品を受け取るとき $X = 1200$ 、参加者がゲームで景品を受け取らないとき $X = 0$ である。

- (2) (i) 次に示す表

X	0	1200	計
確率	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

より、数量 X の期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{8} + 1200 \cdot \frac{3}{8} = \underline{450}_{\text{コサシ}}$$

である。

- (ii) 次の支払い方法 1 を考える。

支払い方法 1

参加者は 1 回目のくじを引く直前に参加料 500 円を支払う。

支払い方法 1 の場合、主催者が負担する金額 X 円の期待値が、参加料の金額 500 円未満であるとき、主催者は参加料の設定は妥当であると判断し、参加料の金額 500 円以上であるとき、参加料の設定は妥当ではないと判断する。

(i) で求めた X 円の期待値 450 円は参加料の金額 500 円 未満である $\textcircled{0}_{\text{ス}}$ 。したがって、主催者は参加料 500 円という設定について 妥当である $\textcircled{0}_{\text{セ}}$ と判断する。

- (3) a を正の整数とする。次の**支払い方法 2** を考える。

支払い方法 2

参加者は 1 回目, 2 回目, 3 回目のくじを引く直前にそれぞれ料金 a 円を支払う。なお, この料金をくじ引き料といい, 当たりが出た後は, くじを引かないため, くじ引き料を支払わないことになる。

支払い方法 2 で, ゲームを通して参加者が支払うくじ引き料を参加料とし, Y 円で表す。

- (i) $a = 170$ とする。このとき, 次が成り立つ。

- 1 回目に当たりが出るとき, $Y = 170$ である。
- 1 回目に当たりが出ず, かつ 2 回目に当たりがでるとき, $Y = 340$ である。
- 1 回目, 2 回目ともに当たりが出ないとき, $Y = 510$ である。

次に示す表

Y	170	340	510	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

より, 数量 Y の期待値は

$$170 \cdot \frac{3}{16} + 340 \cdot \frac{1}{8} + 510 \cdot \frac{11}{16} = \frac{6800}{16} = \underline{425 \text{ ソタチ}}$$

である。

- (ii) **支払い方法 2** の場合, 主催者が負担する金額 X の期待値が, 参加料 Y 円の期待値未満であるとき, 主催者はくじ引き料の設定は妥当であると判断し, 参加料 Y 円の期待値以上であるとき, くじ引き料の設定は妥当ではないと判断する。

(2) の (i) で求めた X 円の期待値 450 円は, $a = 170$ と設定した場合の **支払い方法 2** で参加者が支払う参加料 Y 円の期待値 425 円 以上である ①_ソ。したがって, 主催者はくじ引き料 170 円という設定について 妥当でない ①_テ と判断する。

また, 主催者がくじ引き料の設定が妥当ではあると判断する条件を考える。 $a = x$ として, このときの参加料 Y 円の期待値が 450 円を超えれば, 妥当であると判断できる。次に示す表

Y	x	$2x$	$3x$	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

より, Y の期待値は

$$x \cdot \frac{3}{16} + 2x \cdot \frac{1}{8} + 3x \cdot \frac{11}{16} = \frac{40}{16}x = \frac{5}{2}x$$

となるから,

$$\frac{5}{2}x > 450$$

より $x > 180$ となる。したがって, 主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは $a > \underline{180 \text{ トナニ}}$ のときであり, 主催者がくじ引き料の設定が妥当でないとは判断するのは $a \leq 180$ のときである。